

1). Misalkan $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = 21$. Hitung order $a^2, a^6, a^8, a^9, a^{14}, a^{15}$, dan a^{18} !

Jawab : $\Rightarrow (a^2)^n = 1$
 $a^{2n} = a^0$
 $n = 21$

Jadi, order $a^2 = |a^2| = 21$

$\Rightarrow (a^6)^n = 1$
 $a^{6n} = a^0$
 $n = 7$

Jadi, order $a^6 = |a^6| = 7$

$\Rightarrow (a^8)^n = 1$
 $a^{8n} = a^0$
 $n = 21$

Jadi, order $a^8 = |a^8| = 21$

$\Rightarrow (a^9)^n = 1$
 $a^{9n} = a^0$
 $n = 7$

Jadi, order $a^9 = |a^9| = 7$

$\Rightarrow (a^{14})^n = 1$
 $a^{14n} = a^0$
 $n = 3$

Jadi, order $a^{14} = |a^{14}| = 3$

$\Rightarrow (a^{15})^n = 1$
 $a^{15n} = a^0$
 $n = 7$

Jadi, order $a^{15} = |a^{15}| = 7$

$\Rightarrow (a^{18})^n = 1$
 $a^{18n} = a^0$
 $n = 7$

Jadi, order $a^{18} = |a^{18}| = 7$

2). Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$ dengan $|a| = 6$.

(a). Tulis semua elemen dari $\langle a \rangle$.

$\rightarrow \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$

(b). Dapatkan dalam $\langle a \rangle$ elemen-elemen a^{32}, a^{47}, a^{70}

$\Rightarrow a^{32} \Rightarrow 32 = 5 \cdot 6 + 2 \rightarrow a^2$

$\Rightarrow a^{47} \Rightarrow 47 = 7 \cdot 6 + 5 \rightarrow a^5$

$\Rightarrow a^{70} \Rightarrow 70 = 11 \cdot 6 + 4 \rightarrow a^4$

3). Diberikan grup $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = 30$. Dapatkan semua generator dari G

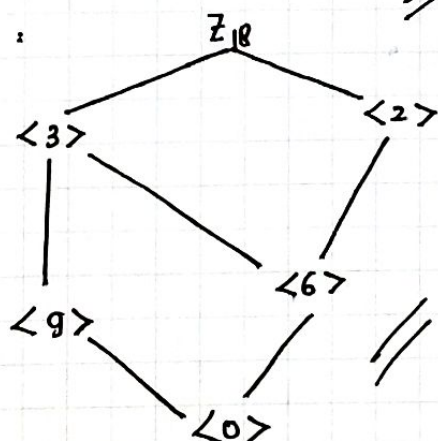
$G = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{29}\}$ $\langle G \rangle = \{a, a^7, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}, a^{23}, a^{29}\}$

Jadi, semua generator G adalah $a, a^7, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}, a^{23}, a^{29}$

4). Gambar diagram Lattice Subgrup untuk $\mathbb{Z}_{18}$

$\rightarrow$ Subgrup $\mathbb{Z}_{18} = \{0, \mathbb{Z}_{18}, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 9 \rangle\}$

Diagram :



5). Diberikan bilangan bulat m dan n ; dan himpunan $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{a+b \mid a \in m\mathbb{Z}, b \in n\mathbb{Z}\}$

(a). Tunjukkan bahwa $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ adalah suatu subgrup dari $\mathbb{Z}$

$$\text{misal : } \underbrace{m_1\mathbb{Z} + n_1\mathbb{Z}}_A \quad \underbrace{m_2\mathbb{Z} + n_2\mathbb{Z}}_B$$

Agar $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ Subgrup $\mathbb{Z}$, maka : $AB^{-1} \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Maka : } & m_1\mathbb{Z} + n_1\mathbb{Z} + (-m_2\mathbb{Z} - n_2\mathbb{Z}) \\ &= (m_1 - m_2)\mathbb{Z} + (n_1 - n_2)\mathbb{Z} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \text{ dapat disisipkan :} \\ &\quad m_3 \quad \quad n_3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow m_3\mathbb{Z} + n_3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}, \text{ maka } m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$$

Sehingga $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

(b). Dapatkan suatu generator untuk Subgrup $12\mathbb{Z} + 21\mathbb{Z}$

$$12\mathbb{Z} = \{\dots, -24, -12, 0, 12, 24, \dots\}$$

$$21\mathbb{Z} = \{\dots, -42, -21, 0, 21, 42, \dots\}$$

Dapat dianalisis, bahwa $12\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat kelipatan 12
Jadi, Generator dari $12\mathbb{Z} = \langle 12 \rangle$

Serta, $21\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat kelipatan 21

Jadi, generator dari $21\mathbb{Z} = \langle 21 \rangle$

Maka Generator dari $12\mathbb{Z} + 21\mathbb{Z} = 33\mathbb{Z}$ adalah $\langle 33 \rangle$

(c). Dapatkan suatu generator untuk Subgrup $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$

$$\rightarrow m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m+n)\mathbb{Z}$$

Sehingga, subgrup $(m+n)\mathbb{Z}$ adalah $\langle m+n \rangle$